Отзыв

официального оппонента о диссертации Трещёва Валентина Сергеевича «Теоремы о возмущениях векторно накрывающих отображений в исследовании неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Разнообразные задачи для неявных дифференциальных уравнений возникают во многих разделах математики и в приложениях. В последнее время в связи с развитием сложных робототехнических систем, исследованиями задач физики, механики и небесной механики усилился интерес к динамическим системам, описываемым неявными уравнениями. Геометрическая теория таких динамических систем разрабатывалась в классических работах В.И. Арнольда, П.А.М. Дирака, В.В. Козлова, А.И. Нейштадта, М. Чибрарио. Значительные результаты в исследовании особенностей решений неявных дифференциальных уравнений, в получении нормальных форм неявного уравнения вблизи его особых точек принадлежат А.А. Давыдову, А. Г. Кузьмину, Э. Росалесу-Гонсалесу, Г. Ишикава, В-З Сун и другим авторам. Современная геометрическая теория неявных дифференциальных уравнений предоставляет эффективные методы исследования сложных механических систем. Нормальные формы неявных дифференциальных уравнений применяются, в том числе, для изучения управляемых систем.

В диссертации В.С Трещёва рассматриваются неявные дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Отметим, что в огромном числе публикуемых ежегодно в течение нескольких десятилетий работ, посвященных различным функционально-дифференциальным уравнениям, статей о неявных уравнениях значительно меньше, при этом они посвящены, как правило, специальному случаю – так называемым уравнениям нейтрального типа, в которых основной причиной «неявности» является участие в записи уравнений старшей производной при различных значениях аргумента. Причина малой исследованности таких уравнений в сложности, а часто и в невозможности применения как геометрических методов динамических систем, так и классического аппарата функционального анализа. Новые возможности для изучения неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом появляются в связи с современными результатами негладкого анализа, прежде всего, с теоремами о точках совпадения и о возмущениях накрывающих отображений. Начало использованию результатов о накрывающих отображениях метрических пространств в теории неявных дифференциальных уравнений было положено работой Е.Р. Авакова, А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского (Дифференц. уравнения, 2009, т. 45, № 5). В последующих работах этих авторов и их учеников С.Е. Жуковского, Е.А. Плужниковой получены условия разрешимости задачи Коши, краевых задач, устойчивости множества решений по отношению к малым возмущениям, начаты исследования накрывающих отображений в частично упорядоченных пространствах и, на их основе, получены первые результаты о неявных дифференциальных неравенствах. Развитие этих результатов, предпринятое в работе В.С. Трещёва, несомненно является весьма нетривиальной актуальной задачей.

Диссертация В.С. Трещёва распространяет методы и подходы, использующие накрывающие отображения метрических пространств, на функционально-дифференциальные уравнения. При этом автор, не только применяет известные результаты о накрывающих отображениях, но и предлагает свои новые утверждения об устойчивости свойства векторного накрывания по отношению к липшицевым возмущениям, а также о векторном накрывании оператора Немыцкого. Таким образом, к достоинствам диссертации следует отнести как новые утверждения о задаче Коши и краевых задачах для неявных дифференциальных уравнений, так и имеющие самостоятельное значение новые утверждения о векторно накрывающих отображениях.

Остановимся подробнее на содержании диссертации и полученных автором результатах.

Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы, перечня обозначений и списка литературы. Объем диссертации 94 страницы.

Первая глава посвящена результатам о векторно накрывающих отображениях, на которых основано дальнейшее исследование систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Здесь приводятся необходимые понятия, формулируется определение свойства векторного накрывания на заданной совокупности. Такое векторное распространение "обычного скалярного накрывания" автору требуется для исследования систем уравнений и краевых задач (всегда являющихся системами, содержащими дифференциальные уравнения и краевые условия). Далее автор приводит полученную Е.С. Жуковским теорему о липшицевых возмущениях векторно накрывающих отображений. С использованием этого утверждения автор доказывает теорему о непрерывной зависимости от параметров решений систем операторных уравнений с векторно накрывающими отображениями. Завершает первую главу исследование оператора Немыцкого. Здесь получены условия векторного накрывания на заданной совокупности применительно к оператору Немыцкого. Для доказательства этого результата используются методы многозначного анализа (измеримость многозначных отображений, суперпозиционная измеримость отображений, лемма Филиппова о неявной измеримой функции). Полученное утверждение открывает возможность применения утверждений о векторно накрывающих отображениях к различным неявным функциональным, дифференциальным, интегральным уравнениям.

Вторая глава посвящена исследованию задачи Коши и краевых задач для неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Составляющие задачу Коши или краевую задачу дифференциальные уравнения, начальные и краевые условия сводятся к системе операторных уравнений относительно пары векторов $(\dot{x}, x(a))$ – бесконечномерной компоненты $\dot{x}$ и конечномерной компоненты $x(a)$.

В § 2.1 получены условия разрешимости задачи Коши для дифференциального уравнения с запаздыванием аргумента, в теореме 2.1.1 даны условия существования решений, в следствии 2.1.1 из этой теоремы сформулированы условия продолжаемости решений. Кроме того, эти утверждения содержат покомпонентные оценки решений, полученные с использованием свойства векторного накрывания. Такие оценки нельзя получить, если пользоваться результатами о "скалярном" накрывании. Отметим также, что автору удалось учесть специфику случая запаздывающего аргумента, благодаря чему оказалось достаточным требовать липшицевость функции $f(t,x,y)$ по второму аргументу только при тех значениях времени t, при которых запаздывающий аргумент $h_j(t)$ принадлежит основному промежутку $[a,b]$.

В п. 2.1.2 рассмотрена задача о непрерывной зависимости от параметров решений задачи Коши. Эта задача формализована следующим образом. Для последовательности задач Коши предполагается заданной такая абсолютно непрерывная функция $x_0(\cdot)$, что величина $f^l(t,x_0(t),\dot{x}_0(t))$ является бесконечно малой (при $l \to \infty$). Автор доказывает существование решений у каждой задачи Коши и сходимость таких решений к функции $x_0(\cdot)$. В этом утверждении требуется совокупное накрывание функций $f^l(t,x,\dot{x}), l=1,2,...$ по третьему аргументу и их совокупная липшицевость по второму аргументу.

В § 2.2 представлены результаты исследования краевой задачи для системы неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся (не обязательно запаздывающим) аргументом. Рассматриваются нелинейные краевые условия. Краевые условия и дифференциальное уравнение, автор записывает в виде операторных уравнений относительно неизвестных $(\dot{x}, x(a)) \in L_\infty \times R^n$. В отличие от отображений в задаче Коши, порождающие эту систему отображения не являются вольтерровыми. К исследованию полученной системы применяются утверждения о накрывающих отображениях. В п. 2.1.1 получены условия разрешимости краевой задачи и оценки решений, в п. 2.2.2 – условия непрерывной зависимости решений от изменений функций, порождающих дифференциальные уравнения и краевые условия.

Приведенные в диссертации утверждения сравниваются с утверждениями более ранних работ о неявных обыкновенных дифференциальных уравнениях для выяснения влияния отклонения аргумента; автор демонстрирует эффективность применения векторного накрывания для исследования различных систем. Все основные результаты диссертации являются новыми, сопровождаются полными доказательствами. Стиль изложения ясный и логичный.

На мой взгляд, наиболее важными являются следующие результаты:

1) условия непрерывной зависимости от параметров решений систем операторных уравнений с векторно накрывающими отображениями в произведениях метрических пространств;

2) условия векторного накрывания оператора Немыцкого в пространствах измеримых существенно ограниченных функций с векторнозначной метрикой;

3) условия существования и оценки компонент решений задачи Коши для систем неявных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом;

4) условия непрерывной зависимости от параметров решений задачи Коши для систем неявных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом;
5) условия существования и оценки компонент решений краевых задач для систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом;
6) условия непрерывной зависимости от параметров решений краевых задач для систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Перечисленные результаты имеют существенное значение для теории дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений, теории управления, вносят определенный вклад в нелинейный функциональный анализ. Полученные результаты также могут использоваться в исследовании разрешимости операторных уравнений и нахождении оценок их решений, а также для анализа корректности математических моделей.

Замечания.

1. В § 1.3 рассмотрен оператор Немыцкого в пространстве существенно ограниченных векторных функций, для этого оператора получена теорема о векторном накрывании на совокупности измеримых сечений заданного измеримого многозначного отображения. В скалярном случае Е.А. Плужниковой в ее кандидатской диссертации "Векторные накрывающие отображения и краевые задачи для дифференциальных уравнений неявного вида" (Тамбов, 2013) было доказано утверждение о накрывании оператора Немыцкого не только в пространстве L_∞, но и в пространствах L_p при любом $p \geq 1$. Возникает естественный вопрос, верен ли аналогичный результат о векторном накрывании оператора Немыцкого в пространствах L_p. В диссертации отсутствует комментарий о возможности такого распространения теоремы 1.3.1. В случае доказательства такого более общего результата появилась бы возможность исследовать функционально-дифференциальные уравнения в более общей и естественной ситуации, когда производная решения суммируема, хотя при этом появились бы дополнительные ограничения на рост нелинейности.

2. На стр. 53 рассматривается аналог теоремы 1.3.1 в ситуации, когда функция g по второму аргументу является векторно А-накрывающей множество $W(t)$ на совокупности $\mathcal{B}(u^0(t),R)$. Отмечается, что многозначное отображение $t \to \mathcal{B}(u^0(t),R)$ измеримо, но доказательство этого факта не приводится, а утверждается, что оно "аналогично приведенному выше доказательству измеримости отображения $t \to \mathcal{B}(u^0(t),R,u(t))$". На мой взгляд, это доказательство следовало бы привести, так как отображения $t \to \mathcal{B}(u^0(t),R)$ и $t \to \mathcal{B}(u^0(t),R,u(t))$ имеют разное представление..

3. К сожалению, автор ограничился единственным иллюстрирующим примером: пример 2.2.1, с. 79, иллюстрирует Теорему 2.2.1, причем только в части условий разрешимости краевой задачи. Следовало бы привести оценки решения, гарантируемые упомянутой теоремой. Бо́льшее число примеров позволило бы обсудить существенность и точность условий полученных автором теорем и дать представление о возможности ослабления этих

условий. Кроме того, следовало хотя бы прокомментировать перспективы применения теорем о накрывающих отображениях к упомянутым уравнениям нейтрального типа, имея в виду известные примеры из монографии Дж. Хэйла (в частности, примеры 1.3, 1.9, гл. 12 издания 1977 г.) .

4. В примере 2.2.1 условия иллюстрируемой теоремы выполнены при более слабом по сравнению с (2.2.11) условии: $|\mu|+T<1$.

5. В тексте диссертации имеется незначительное число редакционных погрешностей (с. 45, 61, 79).

Перечисленные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы.

Основные результаты диссертации в полном объеме своевременно опубликованы в одиннадцати работах, из которых восемь статей – в журналах, входящих в перечень рецензируемых журналов и изданий, рекомендованный ВАК. Результаты диссертации были доложены автором на научных конференциях и семинарах.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация В.С. Трещёва «Теоремы о возмущениях векторно накрывающих отображений в исследовании неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом» удовлетворяет всем требованиям п. 9 Положения о присуждении ученых степеней, предъявляемых к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент
профессор кафедры информационных
систем и математических методов в экономике
Пермского государственного национального
исследовательского университета,
доктор физико-математических наук,
профессор Максимов Владимир Петрович

27.11.2017 г.

Максимов Владимир Петрович
614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15.
ФГБОУ ВО «Пермский государственный
национальный исследовательский университет»,
кафедра информационных систем
и математических методов в экономике
E-mail: maksimov@econ.psu.ru

Тел. (сл.) 8 342 239 68 48, (д.) 8 342 239 14 49, (моб.) 8 908 259 84 94

В.П. Максимова заверяю
секретарь совета
Е.П. Антропова